

## پیاده‌سازی تکنیک Disk Method برای محاسبه سریع و دقیق توزیع پتانسیل منتجه از بارهای فضایی در کاربردهای شکست الکتریکی Non-thermal

مونا قاسمی، حسین محسنی، کاوه نیایش و امیرعباس شایگانی اکمل  
آزمایشگاه فشار قوی، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر  
پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

واژه‌های کلیدی: Disk Method، محاسبه توزیع پتانسیل، روش سریع و دقیق، بارهای فضایی، شکست الکتریکی

### چکیده

برای مدل‌سازی شکست الکتریکی در عایقهای گازی، حل همزمان معادلات پیوستگی (مربوط به الکترونها و یونهای مثبت و منفی) و معادله پواسون (به علت وابستگی برخی پارامترهای به شدت میدان الکتریکی محلی) استفاده می‌شود. روشهای عددی متنوعی برای حل معادلات پیوستگی و معادله پواسون ارائه شده است. در این بین، ضمن آنکه حل معادله پواسون ۸۰-۷۰٪ زمان کل شبیه‌سازی را شامل می‌گردد، به علت تغییرات مکانی شدید بارهای فضایی در پروسه شکست الکتریکی، بکارگیری روشهای دقیق برای محاسبه شدت میدان الکتریکی ضروری است. شکست الکتریکی مورد نظر در این مقاله از نوع non-thermal می‌باشد که دارای کاربردهای متنوعی در صنایع مختلف و از جمله استفاده از (DBD) Dielectric Barrier Discharge برای افزایش استقامت الکتریکی برای کاربردهای فشار قوی می‌باشد که مراحل تحقیقاتی خود را طی می‌کند. در این مقاله برای حل معادله پواسون، تکنیک سریع و دقیق Disk Method کدنویسی شده و از آن برای محاسبه توزیع پتانسیل کانال تخلیه استفاده شده است. همچنین کاهش دقت حل پواسون تک بعدی و غیر قابل اعتماد بودن آن در مقایسه با Disk Method با کاهش شعاع کانال تخلیه نشان داده شده است.

### ۱- مقدمه

یکی از پرکاربردترین تکنولوژیهای ایزولاسیون فشار قوی استفاده از گازهای دی‌الکتریک خود بازیاب (self-restoring) به عنوان محیط عایقی می‌باشد. دو کاربرد معمول از این تکنولوژی عبارتند از: استفاده از هوا در فشار اتمسفر به عنوان گاز دی‌الکتریک و کاربرد بعدی سیستمهای با ایزولاسیون گاز پرفشار (GIS) با گاز SF<sub>6</sub> یا مخلوط گازی که SF<sub>6</sub> یکی از مولفه‌های تشکیل دهنده آن می‌باشند.

سیستمهای با ایزولاسیون هوا به خوبی توسعه داده شده و بطور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. ابعاد فیزیکی طرحهای با ایزولاسیون هوا به دلیل پایین بودن سطح تحمل عایقی هوا، بزرگ بوده و لذا هزینه آنها در مکانهایی که زمین ارزش زیادی دارد، گران تمام می‌شود.

در مقابل، طرحهای GIS فشرده (compact)، تجاری و قابل اعتماد بوده و خواص دی‌الکتریک و عملکرد عایقی مطلوبی از هر دو جنبه مسائل فنی و اقتصادی ارائه می‌دهند. به عنوان یک محیط عایقی، SF<sub>6</sub> دارای استقامت دی‌الکتریک نسبتاً بالا، هدایت حرارتی خوب و تلفات پایین می‌باشد. در مقابل SF<sub>6</sub> دارای بعضی ویژگیهای نامطلوب نیز می‌باشد: هنگامیکه در

## بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

در صورتی که بعضی یا تمام هادی‌های فلزی با پوشش‌های دی‌الکتریک پوشانده شوند، استقامت دی‌الکتریک یک سیستم با ایزولاسیون هوا بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش خواهد یافت. علت این امر نشستن بار فضایی (منتجه از تخلیه‌های الکتریکی non-thermal) روی سطوح پوشش دی‌الکتریک و در نتیجه اصلاح توزیع میدان و پتانسیل الکتریکی روی قسمتهای مختلف مجموعه عایقی در راستای افزایش استقامت الکتریکی مجموعه می‌باشد.

روش غالب برای مدل‌سازی تخلیه‌های الکتریکی non-thermal حل همزمان معادلات پیوستگی و معادله پواسون می‌باشد. بازه زمانی بسیار کوتاه تخلیه و تغییرات شدید مکانی بارهای فضایی که تغییرات شدید شدت میدان الکتریکی را نتیجه می‌دهد و وابستگی برخی پارامترهای معادلات پیوستگی به شدت میدان محلی و طبیعت بسیار غیرخطی مسأله، موجب گردیده که شبیه‌سازی عددی تخلیه بسیار مشکل باشد. در این رابطه حل عددی دقیق معادله پواسون با استفاده از روش relaxation سه بعدی، ۸۰-۷۰٪ زمان شبیه‌سازی را به خود اختصاص می‌دهد. این مشکل با توجه به لزوم حل همزمان معادله پواسون با معادلات پیوستگی برای هر بازه زمانی دو چندان خواهد شد. لذا همواره روشهای حل سریع و در عین حال دقیق معادله پواسون برای مدل‌سازی تخلیه الکتریکی مورد توجه بوده است [9-15].

در این مقاله تکنیکی موسوم به Disk Method که برای اولین بار در [9] برای کاربردهای تخلیه الکتریکی مطرح و بعد از آن در [10, 16-17] نیز مورد استفاده قرار گرفت، کدنویسی شده و دقت آن در مقایسه با حل معادله پواسون یک بعدی به ازای شعاع کانالهای مختلف ارزیابی گردیده است.

### ۲- تئوری شکست الکتریکی

قبل از ارائه روشهای مدل‌سازی تخلیه الکتریکی در قسمت بعدی، در این قسمت مرور مختصری از مکانیزمهای شکست الکتریکی شامل تشکیل بهمن (avalanche)، استریم و تخلیه

معرض تخلیه الکتریکی قرار می‌گیرد، در تجزیه آن بعضی مواد سمی و با خاصیت خوردندگی تشکیل می‌شود. این گاز در فشار استفاده شده در پستهای گازی در درجه حرارت‌های نه چندان پایین (حدود دمای ۲۰-) مایع می‌شود. ایراد اصلی تکنولوژی SF<sub>6</sub> سهم زیاد آن در گرم شدن جهانی (اثر گلخانه- ای) هنگام آزاد شدن در اتمسفر می‌باشد چراکه SF<sub>6</sub> یک جاذب اشعه مادون قرمز بوده و بسیار آهسته تجزیه می‌شود. اگرچه در حال حاضر سهم آن هنوز کم می‌باشد، اما پیش‌بینی شده که حضور طولانی مدت آن در استراتوسفر، تهدیدی جدی از تأثیری بدون برگشت روی آب و هوای آینده در طی چندین هزار سال خواهد بود. لذا SF<sub>6</sub> در پروتکل Kyoto به عنوان گازی که باید انتشار آن محدود گردد، لیست شده است [1].

یک راهکار برای حل مسائل زیست محیطی سیستمهای بر اساس SF<sub>6</sub>، جستجو برای گزینه‌های مناسب جایگزین SF<sub>6</sub> می‌باشد. جستجو برای گاز یا مخلوط گازی که خواص الکتریکی و شیمیایی قابل قیاس با SF<sub>6</sub> را داشته و نیز به لحاظ اقتصادی قابل رقابت باشد، هنوز ثمر نداده است. امروزه بیشتر تحقیقات روی مخلوطهای گازی که SF<sub>6</sub> یکی از تشکیل- دهنده‌های اصلی آن باشد، متمرکز شده است [2, 3]. چراکه این مخلوطها دارای پتانسیل بطور قابل ملاحظه‌ای پایین‌تری برای گرم کردن جهانی نسبت به SF<sub>6</sub> بوده به عنوان گزینه‌های سازگار با محیط زیست در کاربردهای الکتریکی از آنها یاد می‌شود. البته این حسن در حال حاضر با هزینه بالاتر همراه است.

راه حل دیگر ترکیب هوا و دی‌الکتریک جامد به عنوان محیط عایقی است. چنین سیستمی باید قادر به ارضای معیارهای مشابه در سیستمهای SF<sub>6</sub> باشد. اگر روش مذکور بطور صحیح استفاده شود، می‌تواند به بهبود قابل ملاحظه‌ای در عملکرد عایقی نایل شود. در این رابطه دو نوع ساختار مطرح شده عبارتند از: الف) حایل دی‌الکتریک در فاصله هوایی بین دو الکترود [4] و ب) حایل دی‌الکتریک به صورت پوشش روی الکترود(ها) (Coating)، [5-8].

## بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

روشن ارائه خواهد شد.

در هر حجم گاز الکترونیهای آزادی وجود دارند که بوسیله تشعشعات کیهانی، رادیو اکتیویته طبیعی و جدا شدن (detachment) از یونهای منفی تولید می‌شوند. بنابراین اگر میدان الکتریکی به اندازه کافی بالا باشد، این الکترونها شتاب خواهند گرفت و با مولکولهای گاز برخورد خواهند کرد و بدین ترتیب الکترونها بیشتری آزاد خواهند شد و این کار ادامه پیدا می‌کند تا آنچه به نام بهممن (avalanche) الکترونی موسوم می‌باشد، تشکیل شود و بدین ترتیب تعداد الکترونها چند برابر می‌شود. بهممن الکترونی اولین بار توسط Raether، Townsend، Meek و [18] Craggs مطرح و توسط [19] در آزمایشات محفظه سرد مشاهده شد.

تا زمانیکه بار خالص برای تغییر قابل ملاحظه توزیع میدان کافی نباشد، مرکز بهممن با سرعت رانش الکترونی متناسب با میدان الکتریکی یکنواخت حرکت می‌کند. اگر در طی عمر بهممن، الکترونها ثانوی آزاد شوند، آنگاه بهممن‌های جدیدی تولید خواهند شد و جریان کل تقویت خواهد شد. الکترونها ثانویه بوسیله یونهای مثبت یا فوتونهای UV که به کاتد برخورد می‌کنند و یا بوسیله فوتوایونزاسیون گاز پشت سر یک بهممن آزاد می‌شوند. در این صورت جریان به صورت نمایی به واسطه آنچه که به مکانیزم شکست تانزند موسوم است [18]، افزایش می‌یابد. تکیه اصلی این مدل از شکست بر آن است که هر بهممن باید یک الکترون ثانوی را قبل از جذبش به آند فراهم نماید تا تخلیه مستقل شکل گیرد. مکانیزم تانزند اولین مدل پیشنهاد شده برای توضیح فاز اولیه تخلیه الکتریکی در گازهای در فشارهای بالا می‌باشد.

در فشارهای بالا که معمولاً در یک DBD با آن مواجه‌ایم، نوع متفاوتی از شکست موسوم به استریم رخ می‌دهد که علت آن بار فضایی قابل ملاحظه تولید شده در طی گذر اولیه بهممن در طول فاصله هوایی می‌باشد. مکانیزم استریم در ابتدا بوسیله Raether [19] و Loeb و Meek [20] برای توضیح شکست الکتریکی فواصل هوایی با اضافه ولتاژ نزدیک فشار اتمسفر ارائه شد. آنها پیشنهاد کردند که هنگامیکه بهممن

الکترونی تا اندازه‌ای رشد کند که قادر به شیلد کردن جزئی خود از میدان اعمالی باشد، انتشار و رشد بهممن بطور قابل توجهی تغییر می‌کند. یک استریم اساساً یک موج یونیزه‌کننده می‌باشد. در پیشانی موج (سر استریم) جدا شدن ذرات باردار مثبت و منفی ناحیه داخلی را شیلد می‌کند و موجب تقویت شدید میدان الکتریکی روی یک ناحیه محدود شده، درست در خارج سر استریم می‌گردد. برای میدانهای نزدیک آستانه شکست، ضریب یونیزاسیون قویاً تابعی از میدان الکتریکی می‌باشد. اگر مکانیزمی نظیر انتقال (transport)، خروج الکترون از فلز در اثر تابش نور موسوم به photoemission یا فوتوایونزاسیون وجود داشته باشد که تعداد کمی از الکترونها را آزاد زاینده را درست در جلوی سر استریم قرار دهد، سپس پدیده بهممنی در میدان تقویت شده محلی می‌تواند سبب شود که استریم با سرعتی بسیار بزرگتر از سرعت رانش الکترونی منتشر شود. به علاوه چگالی یونیزاسیون در بدنه استریم می‌تواند تا مقادیر بسیار بیشتر از آنچه که برای آغاز تشکیل استریم ضروری است، افزایش یابد. این توضیح می‌دهد که چرا در فشارهای اتمسفر مکانیزم شکست در هوا و سایر گازها بسیار سریع می‌باشد (در رنج زمان گذر یک بهممن) و یک کانال تخلیه رشته‌ای (filamentary) را به جای یک توزیع پراکنده بهممن‌ها را خواهیم داشت.

در زمانی که استریم فاصله هوایی را پل می‌زند، یک ناحیه ریزش کاتد (cathode-fall) از میدان الکتریکی بالا و چگالیهای یون مثبت بالا در کسری از نانو ثانیه برقرار می‌شود. تخلیه‌های روشن بوسیله یک ناحیه ریزش کاتد میدان بالای محلی مشخص می‌شوند. در فشار اتمسفر، ضخامت این ناحیه میدان بالا در حدود ۱۰ میکرومتر می‌باشد. جریان در یک میکرو تخلیه در زمان تشکیل لایه کاتد به مقدار پیک خود می‌رسد. بلافاصله پس از آن، تجمع بار در سطح دی الکتریک منجر به یک افت محلی میدان الکتریکی در ناحیه تعریف شده بوسیله بار سطحی می‌گردد. این اثر بازدارندگی حایل دی-الکتریک باعث می‌شود که عمر یک میکرو تخلیه تا چند نانوثانیه، بار منتقل شده نوعاً تا ۱۰۰ پیکو کولن و انرژی تلف شده تا کسری از میکروژول محدود شود [21].

### بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

#### ۳- مدل هیدرودینامیک تخلیه گاز

حجم قابل ملاحظه‌ای از تلاش‌های تئوریک، عددی و آزمایشگاهی برای فهم توسعه یک بهمن الکترونی، گذر آن به استریمرها، انتشار پیشانی‌های استریمر [14, 22-23] و تشکیل یک تخلیه روشن (به عنوان مکانیزمهای اصلی تولید پلاسمای تخلیه گاز non-thermal در فشار اتمسفر) انجام شده است. گذر بعدی به جرقه‌ها (spark) و قوس‌ها (arc) شروع رژیم پلاسمای حرارتی را مشخص می‌کنند. مرور جامعی از پلاسمای حرارتی در [24] موجود می‌باشد.

اگرچه مدل‌های جنبشی تصویر فیزیکی واضحی از گذر بهمن به استریمر و انتشار بعدی آن ارائه می‌دهند، اکثر شبیه‌سازیهای عددی چنین پدیده‌ای مدل‌های تقریبی هیدرودینامیکی پراکنش-رانس (diffusion-drift) را برای توصیف تشکیل چگالیهای بار استفاده کرده‌اند. دلیل عمده این حقیقت آن است که شبیه‌سازیهای جنبشی بسیار زمانبر می‌باشند. ساده‌ترین مجموعه از معادلات در قالب مدل سیال (شامل اصول اصلی فیزیک تخلیه گاز) معادلات پیوستگی برای الکترون‌ها و یونهای مثبت و منفی (برای محاسبه نحوه توسعه بار فضایی) تزویج شده با معادله پواسون (برای محاسبه اصلاح میدان الکتریکی به علت وجود بار فضایی) می‌باشد. معادلات پیوستگی در فرم چند بعدی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} &= S + N_e \alpha |W_e| - N_e \eta |W_e| - N_e N_p \beta_{ep} - \nabla \cdot (N_e W_e - D \nabla N_e), \\ \frac{\partial N_p}{\partial t} &= S + N_e \alpha |W_e| - N_e N_p \beta_{ep} - N_n N_p \beta_{np} - \nabla \cdot (N_p W_p), \\ \frac{\partial N_n}{\partial t} &= N_e \alpha |W_e| - N_n N_p \beta_{np} - \nabla \cdot (N_n W_n) \end{aligned} \quad (1)$$

که  $t$  زمان بوده و  $N_e$ ،  $N_p$  و  $N_n$  به ترتیب چگالیهای الکترون‌ها، یونهای مثبت و منفی، و  $W_e$ ،  $W_p$  و  $W_n$  به ترتیب سرعت‌های رانش الکترون‌ها، یونهای مثبت و منفی و  $D$  ضریب پراکنش الکترون می‌باشند.  $\alpha$ ،  $\eta$  و  $\beta_{ep}$  و  $\beta_{np}$  ضرایب به ترتیب یونیزاسیون، پیوستگی (attachment)، باز ترکیب الکترون-یون مثبت و باز ترکیب یون منفی-یون مثبت می‌باشند.  $S$ ، ترم منبع به خاطر فوتو یونیزاسیون می‌باشد.

ضرایب باز ترکیب  $\beta_{ep}$  و  $\beta_{np}$  ثابت و برابر با  $\beta$  در نظر گرفته می‌شوند [25].

معادله پواسون برابر خواهد بود با:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) + \frac{e}{\epsilon_0} (N_p - N_n - N_e) = 0 \quad (2)$$

که  $\epsilon_0$  ثابت دی‌الکتریک فضای آزاد،  $\epsilon_r$  گذردهی نسبی،  $e$  بار الکترون و  $V$  پتانسیل الکتریکی می‌باشد. آنگاه میدان الکتریکی  $E$  برابر خواهد بود با:

$$E = -\nabla V \quad (3)$$

برخی خواص گاز نظیر سرعت‌های رانش و ضریب یونیزاسیون برخورد  $\alpha$  توابعی از  $E/N$  می‌باشند ( $N$  چگالی ذرات گاز می‌باشد). لذا معادلات پیوستگی و پواسون باید بطور همزمان حل شوند. این مقاله روی محاسبه عددی شدت میدان الکتریکی متمرکز یافته است.

#### ۴- محاسبه توزیع شدت میدان الکتریکی

با افزایش جریان در پروسه تخلیه الکتریکی، مرحله‌ای فرا می‌رسد که میدان الکتریکی در یک ساختار دو الکتروود صفحه‌ای موازی دیگر یکنواخت نمی‌باشد. علت این پدیده تغییر شکل میدان به خاطر وجود بارهای فضایی تولید شده در پروسه تخلیه می‌باشد. در این قسمت سه روش برای محاسبه توزیع پتانسیل الکتریکی و متعاقب آن شدت میدان الکتریکی در کانال تخلیه ارائه می‌شود که عبارتند از:

۱- روش relaxation دو بعدی

۲- حل تک بعدی معادله پواسون

۳- تکنیک Disk Method

#### ۴-۱ روش relaxation دو بعدی

با در نظر گرفتن ساختار دو الکتروود صفحه‌ای موازی و کانالتخلیه در فاصله هوایی به صورت استوانه‌ای بین دو الکتروود، معادله پواسون باید در مختصات استوانه‌ای حل شود:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

### بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

با تعریف  $V_r$  به صورت :

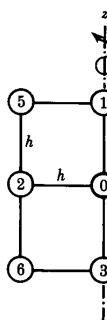
$$V_r = \frac{V_2 - V_4}{2h}$$

و با جاگذاری در رابطه اصلی خواهیم داشت :

$$V_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 V_i + \frac{V_2 - V_4}{8s} + \frac{h^2 \rho}{4 \epsilon_0} \quad (6)$$

برای نقاط محوری (شکل (۲))، پتانسیل برابر خواهد بود با:

$$V_0 = \frac{1}{6} (V_1 + 4V_2 + V_3) + \frac{h^2 \rho}{4 \epsilon_0} \quad (7)$$



شکل (۲): محاسبه پتانسیل نقاط محوری کانال تخلیه [26]

توزیع پتانسیل کانال تخلیه جمع آثار پتانسیل ناشی از اعمال ولتاژ و پتانسیل ناشی از بارهای فضایی می‌باشد. بخش مربوط به اعمال ولتاژ با شرایط زیر :

برای تمام  $r$  :  $V = 0$  در  $x = 0$

برای تمام  $r$  :  $V = V_1$  در  $x = d$

$$V = \frac{x}{d} V_1 \quad \text{for: } r \rightarrow \infty, 0 < x < d$$

که اختلاف پتانسیل بین دو الکترود می‌باشد و در این حالت  $\rho = 0$ ، یک توزیع خطی پتانسیل را برای تمام  $r$  به صورت  $V = V_1 x/d$  نتیجه خواهد داد که این منجر به داشتن میدانی یکنواخت در فاصله هوایی خواهد شد. بخش مربوط به در نظر گرفتن بارهای فضایی با شرایط زیر می‌باشد :

برای تمام  $r$  :  $V = 0$  در  $x = 0, d$

$$V \rightarrow 0 \quad \text{for: } r \rightarrow \infty, 0 < x < d$$

شرط اخیر را برای محاسبات عددی به صورت می‌توان ارائه نمود.

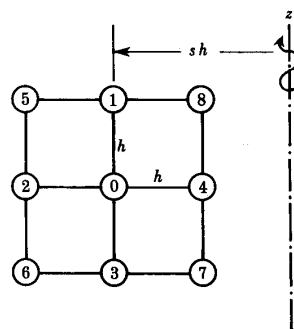
$$V = 0 \quad \text{for: } r = r_1$$

که  $r_1$  در مقایسه با طول فاصله هوایی تخلیه و شعاع تخلیه بزرگ می‌باشد.

که  $\rho$  چگالی بار خالص می‌باشد. در این مدل  $V$  نسبت به  $\varphi$  متقارن بوده و لذا  $V$  تنها تابعی از  $r$  (متغیر شعاع کانال تخلیه) و  $Z$  (متغیر طول فاصله هوایی) می‌باشد. با بسط  $V(r, Z)$  حول نقطه  $(r_0, z_0)$  خواهیم داشت :

$$V(r, z) = V_0 + (r - r_0)V_r(r_0, z_0) + (z - z_0)V_z(r_0, z_0) + \frac{1}{2}[(r - r_0)^2 V_{rr}(r_0, z_0) + 2(r - r_0)(z - z_0)V_{rz}(r_0, z_0) + (z - z_0)^2 V_{zz}(r_0, z_0)] + \dots \quad (5)$$

در روش relaxation، پتانسیل هر نقطه با متوسط گیری پتانسیل نقاط اطراف (و با داشتن پتانسیل نقاط مرزی) حدس زده می‌شود و در یک پروسه تکراری به جواب می‌رسد. برای تشریح این مطلب، یک قسمت از شبکه مش بندی شده در مختصات استوانه‌ای در شکل (۱) نشان داده شده است [26].



شکل (۱): قسمتی از شبکه مش بندی شده در مختصات استوانه‌ای [26]

با توجه به شکل (۱) و نوشتن معادله (۵) برای ۴ نقطه اطراف نقطه ۰ (و با صرف نظر نمودن از ترمهای بالاتر از مرتبه ۲ در این معادله) خواهیم داشت :

$$V_1 = V_0 + 0 + hV_z + \frac{1}{2}[0 + 0 + h^2 V_{zz}]$$

$$V_2 = V_0 + hV_r + 0 + \frac{1}{2}[h^2 V_{rr} + 0 + 0]$$

$$V_3 = V_0 + 0 - hV_z + \frac{1}{2}[0 + 0 + h^2 V_{zz}]$$

$$V_4 = V_0 - hV_r + 0 + \frac{1}{2}[h^2 V_{rr} + 0 + 0]$$

با جمع ۴ معادله فوق خواهیم داشت :

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4V_0 + h^2 [V_{rr} + V_{zz}]$$

با توجه به آنکه  $V_{rr} + V_{zz} = -V_r/r - \rho/\epsilon_0$  (با توجه به

معادله (۴)) و شکل (۱) خواهیم داشت :

$$V_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 V_i + \frac{h^2}{4s} V_r + \frac{h^2 \rho}{4 \epsilon_0}$$

### بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

#### ۲-۴ حل تک بعدی معادله پواسون

در این مدل توزیع پتانسیل نه تنها در راستای  $\varphi$  بلکه در راستای  $Z$  نیز متقارن فرض شده و لذا پتانسیل تنها تابعی از  $Z$  خواهد بود :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۸)$$

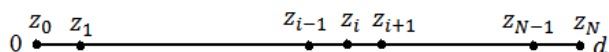
با گسسته‌سازی معادله (۸) و با توجه به شکل (۳) خواهیم داشت :

$$\frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{(\Delta Z)^2} = -\frac{\rho_i}{\epsilon_0}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

که :

$$V_0 = V_N = 0 \quad \text{شرایط دیرشله}$$

$$\Delta Z = \frac{d}{N} \quad z_i = i\Delta Z \quad \rho_i = \rho(z_i)$$



شکل (۳): گسسته‌سازی برای حل عددی معادله تک بعدی پواسون

فرم ماتریسی معادله (۸) برابر خواهد شد با :

$$AV = F \quad A \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1} \quad V, F \in \mathbb{R}^{N-1}$$

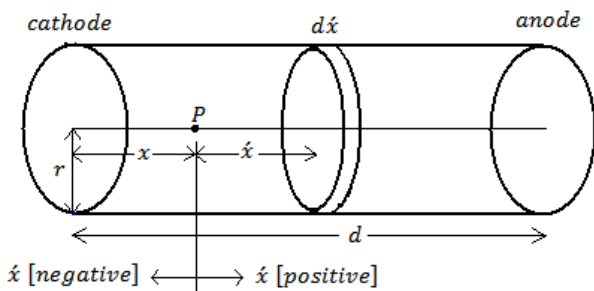
$$A = \frac{1}{(\Delta Z)^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & -1 & 2 & \dots & \\ & & & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{bmatrix}, \quad F = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_{N-1} \end{bmatrix} \quad (۹)$$

توجه داریم که حل تک بعدی معادله پواسون تنها برای بخش بارهای فضایی در نظر گرفته شده است. حل کل با جمع این مقدار و توزیع خطی پتانسیل ناشی از اعمال ولتاژ به الکترودها خواهد بود.

#### ۳-۴ تکنیک Disk Method

در تکنیک Disk Method، کانال استوانه‌ای تخلیه به دیسک‌هایی تقسیم می‌شود (شکل (۴)) و توزیع چگالی بار در هر دیسک ثابت فرض می‌گردد. آنگاه شدت میدان الکتریکی در نقطه P روی محور کانال تخلیه برابر خواهد بود با :



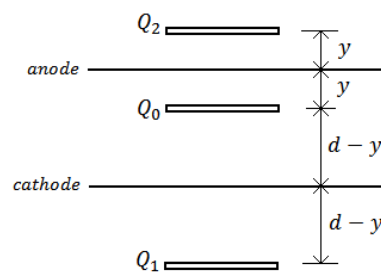
شکل (۴): تکنیک Disk Method

$$E(x) = E_0 + \frac{1}{2\epsilon_0} \left\{ \int_{-x}^0 \rho(x+\hat{x}) \left[ -1 - \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^2 + r^2}} \right] d\hat{x} + \int_0^{d-x} \rho(x+\hat{x}) \left[ 1 - \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^2 + r^2}} \right] d\hat{x} \right\} \quad (۱۰)$$

که  $E_0$  شدت میدان الکتریکی یکنواخت ناشی از اعمال ولتاژ به الکترودها و بدون حضور بار فضایی در کانال تخلیه می‌باشد که برابر است با:  $V/d$ . چگالی بار در هر دیسک ثابت فرض می‌شود. برای در نظر گرفتن شدت میدان الکتریکی ناشی از بارهای فضایی (ترم دوم در معادله (۱۰)) البته پتانسیل الکترودها صفر فرض می‌گردد که این خود بدان معنی است که باید اثرات بارهای القاء شده روی صفحات فلزی الکترودها نیز در محاسبه توزیع پتانسیل در نظر گرفت. برای این منظور می‌توان از تئوری تصاویر استفاده کرد. یک روش برای در نظر گرفتن بارهای تصویر مطابق آنچه در [9] ارائه شده، در نظر گرفتن بار تصویر مساوی با بار اصلی و در فاصله برابر آن از الکتروود در طرف دیگر الکتروود می‌باشد. در این روش با توجه به دو الکتروود زمین شده موازی هم، تعداد بارهای تصویر بی‌نهایت خواهد بود. لذا در [9] دقت روش برای در نظر گرفتن بارهای تصویر تا فواصل  $d$  از طرفین نقطه محاسبه میدان،  $2\frac{1}{2}d$  و  $20d$  مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این مقاله برای حل این مشکل، مقادیر بارهای تصویر نامساوی با بار اصلی در نظر گرفته شده است. در این روش برای هر بار (هر دیسک در تکنیک Disk Method) تنها دو بار تصویر در طرفین الکترودها در نظر گرفته شده است. روش محاسبه در شکل (۵) نشان داده شده است.

### بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

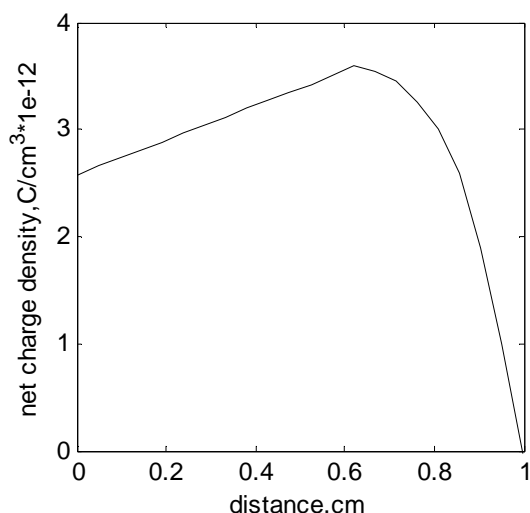
نقطه‌ای ارائه شده است، اما با در نظر گرفتن دیسک‌های بار (در تکنیک Disk Method) همان نتیجه رابطه (۱۵) بدست خواهد آمد. از آنجا که دورترین بار دیسکی تصویر از آند و کاتد به اندازه طول فاصله هوایی ( $d$ ) می‌باشد، کافیت محدوده انتگرالی تا فاصله  $d$  بعد از الکترودها در نظر گرفته شود. این روش در نظر گرفتن بارهای تصویر، بهر حال دقیق‌تر از آنچه است که در [9] در نظر گرفته شده است.



شکل (۵): استفاده از روش تصاویر برای مدل‌سازی پتانسیل صفر الکترودها

#### ۵- نتایج شبیه‌سازیها

حل تک بعدی معادله پواسون (با توجه به معادله (۹)) و تکنیک Disk Method برای مقایسه نتایج به صورت روتینهایی در نرم افزار MATLAB کدنویسی شده است. برای انجام شبیه‌سازی چگالی بار خالص در یک لحظه زمانی تخلیه مطابق شکل (۶) (مشابه آنچه در [9] در نظر گرفته شده و بازسازی گردیده) فرض شده است. این منحنی از حل عددی معادلات پیوستگی (که مدنظر این مقاله نمی‌باشد) برای یک ساختار الکتروود صفحه‌ای موازی با جداسازی ۱ cm و در صورت اعمال ولتاژ ۵۴۳ V (ولتاژ شکست ۵۳۴/۴ می‌باشد) و برای محیط هیدروژن با فشار ۴/۹۲ Torr بدست آمده است. این چگالی بار خالص مربوط به زمانی است که جریان کل ۲۵/۷ میکروآمپر می‌باشد [9].



شکل (۶): منحنی چگالی بار خالص

شکل (۷) منحنی تغییر شکل (انحراف) میدان الکتریکی بواسطه بارهای فضایی مفروض، مطابق شکل (۶) را در طول

که  $Q_1$  و  $Q_2$  تصاویر بار اصلی  $Q_0$  به ترتیب نسبت به کاتد و آند می‌باشند. آنگاه:

$$V_{anode} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{y} + \frac{Q_2}{y} + \frac{Q_1}{2(d-y)+y} \right) \quad (11)$$

$$V_{cathode} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{d-y} + \frac{Q_2}{2y+(d-y)} + \frac{Q_1}{(d-y)} \right) \quad (12)$$

رابطه (۱۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{Q_0}{y} = -\frac{Q_2}{y} - \frac{Q_1}{2(d-y)+y} \Rightarrow Q_2 = -Q_0 - \frac{Q_1 y}{2(d-y)+y} \quad (13)$$

همچنین رابطه (۱۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{Q_0}{d-y} = -\frac{Q_2}{(d-y)+2y} - \frac{Q_1}{(d-y)} \Rightarrow Q_1 = -Q_0 - \frac{Q_2(d-y)}{2y+(d-y)} \quad (14)$$

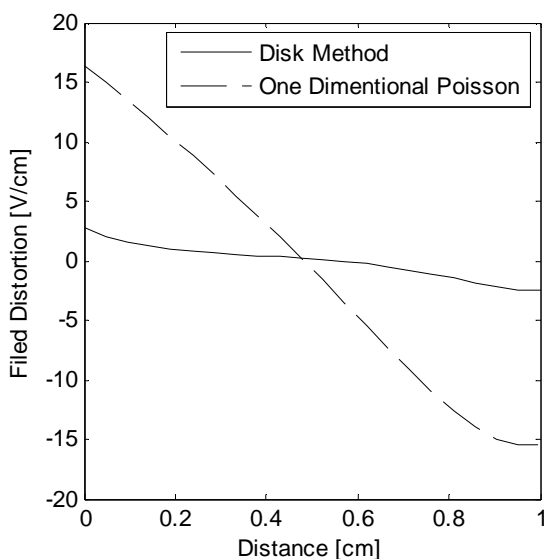
با جاگذاری رابطه (۱۴) در (۱۳) خواهیم داشت:

$$Q_2 = -Q_0 - \frac{y}{2(d-y)+y} \left\{ -Q_0 - \frac{Q_2(d-y)}{2y+(d-y)} \right\} \\ = \left( -Q_0 + \frac{Q_0 y}{2(d-y)+y} \right) \left( 1 - \frac{y(d-y)}{(2(d-y)+y)(2y+(d-y))} \right)^{-1} \quad (15)$$

با جاگذاری رابطه (۱۵) در (۱۴) می‌توان  $Q_1$  را محاسبه نمود. توجه داریم که اگرچه معادلات (۱۱) تا (۱۵) برای بار

### بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

که تکنیک Disk Method در مقایسه با روش حل دقیق relaxation دارای دقت کافی و مطلوب می‌باشد و لذا به عنوان مبنای مقایسه در این مقاله قرار گرفته است. توجه داریم که حل پواسون تک بعدی مستقل از شعاع کانال تخلیه بوده در صورتی که در واقع میزان انحراف میدان، به شدت به شعاع کانال تخلیه وابسته است. برای بررسی این موضوع شکل (۸) نتایج را به ازای  $r = 0.15d$  نشان می‌دهد.



شکل (۸): منحنی تغییر شکل (انحراف) میدان الکتریکی بواسطه بارهای فضایی برای حالت  $r = 0.15d$

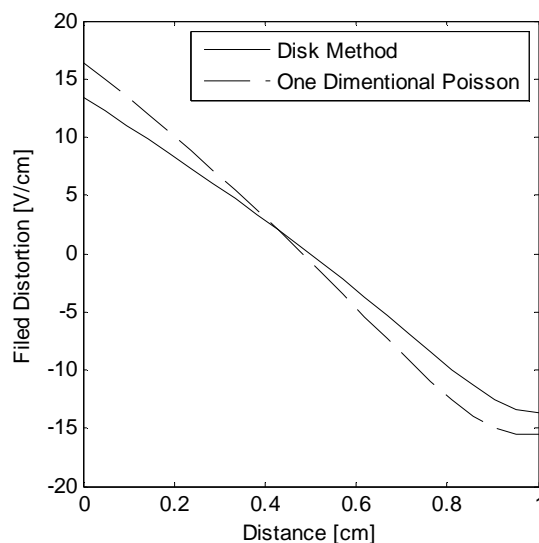
با توجه به شکل (۸) مشاهده می‌گردد که با شعاع کانال تخلیه کوچک، روش حل پواسون تک بعدی غیرقابل اعتماد خواهد بود. توجه داریم که شعاع کانال تخلیه در طی پروسه‌های مختلف تخلیه، متفاوت و متغیر بوده و لذا در شبیه‌سازی هر مرحله باید شعاع کانال تخلیه مناسب و متناسب مورد استفاده قرار گیرد. برای بررسی دقیق‌تر این موضوع، منحنی انحراف میدان (از مقدار یکنواخت) به ازای نسبت‌های مختلف  $R/d$  از  $0.1$  تا  $1$  در روش حل Disk Method در شکل (۹) نشان داده شده است.

محور کانال تخلیه به ازای شعاع کانال تخلیه برابر با طول فاصله هوایی ( $r = d$ ) نشان می‌دهد.

برای محاسبه شدت میدان الکتریکی در روش حل پواسون تک بعدی، بعد از محاسبه پتانسیل نقاط از حل عددی رابطه (۳) به صورت رابطه (۱۶) (تفاضل مرکزی که خطای کمتری را مقایسه با روش تفاضل forward و backward دارد) برای محاسبه شدت میدان الکتریکی استفاده شده است.

$$E_i = \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\Delta x} \quad (16)$$

اما بهر حال برای محاسبه شدت میدان در نقطه اول و آخر کانال تخلیه از روش تفاضل forward استفاده شده است. فاصله  $1 \text{ cm}$  کانال تخلیه به  $21$  قسمت مساوی تقسیم و مش بندی (در هر دو روش حل) شده است. از انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای برای محاسبه انتگرال در تکنیک Disk Method استفاده شده است.

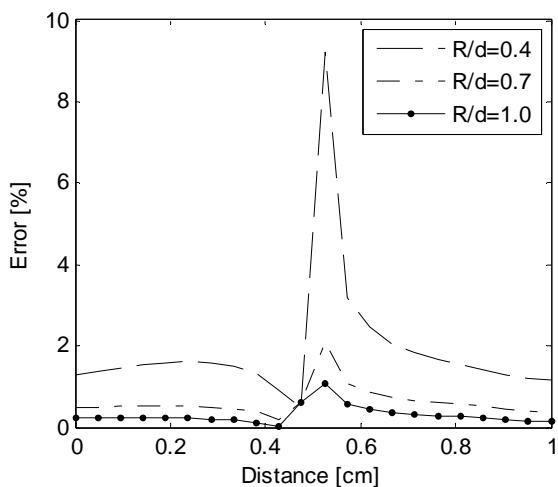


شکل (۷): منحنی تغییر شکل (انحراف) میدان الکتریکی بواسطه بارهای فضایی برای حالت  $r = d$

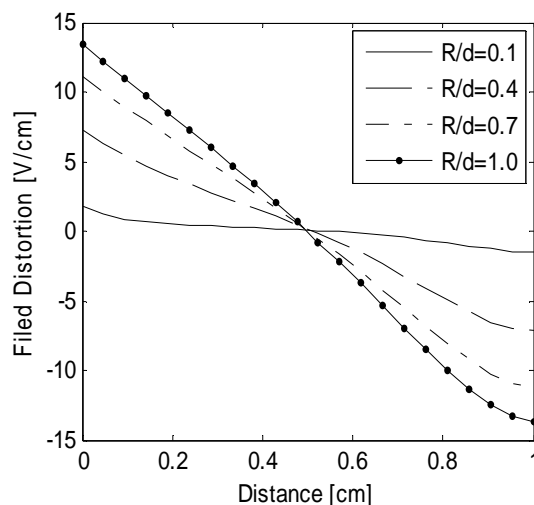
در مقایسه این دو روش حل با توجه به شکل (۷) مشاهده می‌گردد که دقت روش حل پواسون تک بعدی (علیرغم سادگی الگوریتم و زمان حل سریع) به ویژه در نزدیکی الکترودها کاهش می‌یابد. نتایج محاسبات در [9] اثبات می‌کند



### بیست و پنجمین کنفرانس بین‌المللی برق

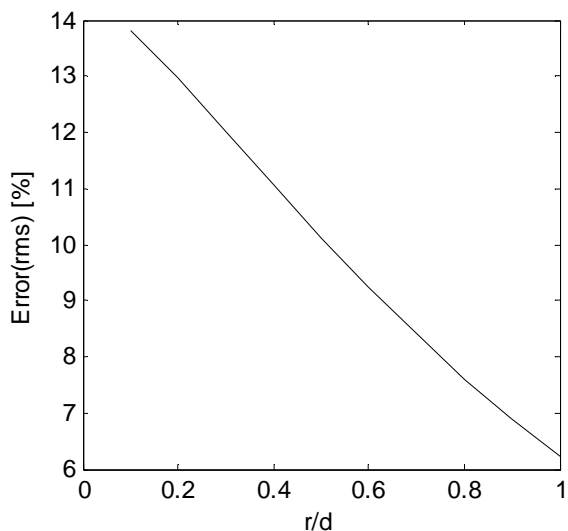


شکل (۱۱): درصد خطای نسبی در صورت استفاده از حل تک بعدی معادله پواسون در مقایسه با تکنیک Disk Method به ازای نسبتهای مختلف  $R/d$

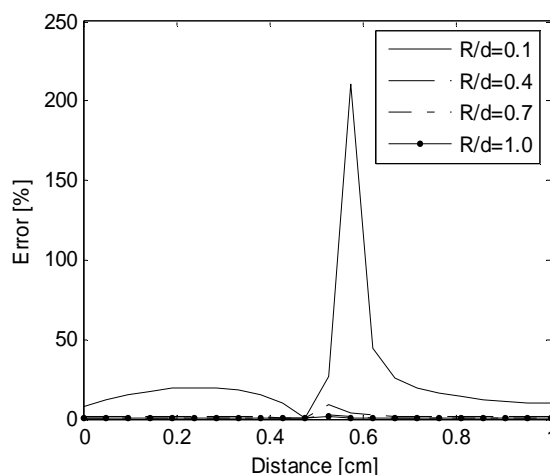


شکل (۹): منحنی انحراف میدان (از مقدار یکنواخت) به ازای نسبتهای مختلف  $R/d$  از ۰/۱ تا ۱ در روش حل Disk Method

همانطور که مشاهده می‌گردد، درصد خطای نسبی به ازای  $R/d$  کمتر از ۰/۴ فراتر از ۱۰٪ خواهد رفت. شکل (۱۲)،  $rms$  خطا را به ازای نسبتهای مختلف  $R/d$  ارائه می‌دهد.



شکل (۱۲):  $rms$  خطا را به ازای نسبتهای مختلف  $R/d$



شکل (۱۰): درصد خطای نسبی در صورت استفاده از حل تک بعدی معادله پواسون در مقایسه با تکنیک Disk Method به ازای نسبتهای مختلف  $R/d$

همچنین شکل (۱۰) درصد خطای نسبی را در صورت استفاده از حل تک بعدی معادله پواسون در مقایسه با تکنیک Disk Method به ازای نسبتهای مختلف  $R/d$  نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۱۰) مشاهده می‌گردد که برای  $R/d = 0.1$  خطا تا ۲۰۰٪ افزایش خواهد یافت. شکل (۱۱) در صد خطای نسبی را به ازای  $R/d = 0.4, 0.7, 1.0$  که در شکل (۱۰) به خوبی معلوم نمی‌باشد، نشان می‌دهد.

منحنی (۱۲) نیز نشان می‌دهد که با کاهش شعاع کانال تخلیه، دقت روش حل یک بعدی معادله پواسون بیش از پیش کاهش می‌یابد.

“Active high voltage insula-tion”, *J. Electrostatics*, vol. 55, pp. 159–72, 2002.

[7] M. Abdel-Salam, H. Singer, A. Ahmed, “On the static behaviour of dielectric barrier discharges in uniform fields”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 34, pp. 1974–81, 2001.

[8] Y. V. Serdyuk, S. M. Gubanski, “Compu-ter modeling of interaction of gas discharge plasma with solid dielectric barriers”, *IEEE Trans. Dielect. Electr. Ins.*, vol. 12, no. 4, pp. 725–35, Aug. 2005.

[9] A. J. Davies, C. J. Evans, “Field distortion in gaseous discharges between parallel-plate electrodes”, *Proc. IEE*, vol. 114, no. 10, pp. 1547-50, Oct. 1967.

[10] A. J. Davies, C. S. Davies, C. J. Evans, “Computer simulation of rapidly develop-ing gaseous discharges”, *Proc. IEE*, vol. 118, no. 6, pp. 816-23, June 1971.

[11] A. A. Kulikovsky, “The structure of strea-mers in N<sub>2</sub>, I: fast method of space-charge dominated plasma simulation”, *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 2556–63, 1994.

[12] A. A. Kulikovsky, “The structure of strea-mers in N<sub>2</sub>, II: Two-dimensional simula-tion”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 2564–69, 1994.

[13] A. A. Kulikovsky, “Two-dimensional simulation of the positive streamer in N<sub>2</sub> between parallel-plate electrodes”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 28, pp. 2483–93, 1995.

[14] A. A. Kulikovsky, “Positive streamer between parallel plate electrodes in atmo-spheric pressure air”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 30, pp. 441–50, 1997.

[15] E. E. Kunhardt, P. F. Williams, “Direct solution of Poisson's equation in cylindrically symmetric geometry: A fast algorithm”, *J. Comput. Phys.*, vol. 57, no. 3, pp. 403-14, 1985.

[16] A. J. Davies, C. J. Evans, P. M. Woodison “Computation of ionisation growth at high current densities”, *Proc. IEE*, vol. 122, no. 7, pp. 765-68, July 1975.

[17] A. J. Davies, C. J. Evans, P. Townsend, P. M. Woodison, “Computation of axial and radial development of discharges between plane parallel electrodes”, *Proc. IEE*, vol. 124, no. 2, pp. 179-82, Feb. 1977.

[18] J. M. Meek, J. D. Craggs, *Electrical Breakdown of Gases*, New York: Wiley, 1978.

[19] H. Raether, *Electron Avalanches and Breakdown in Gases*, London: Butter-worths, 1964.

[20] L. B. Loeb, J. M. Meek, “The mechanism of spark discharge in air at atmospheric pressure”, *J. Appl. Phys.*, vol. 11, pp. 438–47, 1940.

## ۶- نتیجه‌گیری

اگرچه استفاده از مدل‌های تک بعدی برای حل عددی معادلات پیوستگی در شبیه‌سازی تخلیه الکتریکی non-thermal معمول و دارای دقت کافی می‌باشد، اما برای حل معادله پواسون (به علت وابستگی برخی پارامترهای معادلات پیوستگی به میدان الکتریکی محلی) که باید بطور همزمان با معادلات پیوستگی حل شوند، اتکا به حل تک بعدی معادله پواسون دارای دقت کافی نمی‌باشد. این کاهش دقت با کاهش شعاع کانال تخلیه تشدید می‌گردد. در مقابل روش Disk Method که در مقایسه با الگوریتم تکراری relaxation بسیار سریعتر می‌باشد، دارای دقت کافی می‌باشد. چراکه روش مذکور حلی دو بعدی و با لحاظ نمودن شعاع کانال تخلیه را ارائه می‌دهد. در این مقاله با کدنویسی دو روش حل تک بعدی معادله پواسون و Disk Method، عدم دقت روش حل تک بعدی معادله پواسون با نمودارهای مختلف نشان داده شده است. همچنین روشی جدید برای درنظرگرفتن بارهای تصویر ارائه شده که دقتی بالاتر و بازده محاسبات موثرتری را در مقایسه با مرجع [9] نشان می‌دهد.

## ۷- منابع

[1] *Kyoto Protocol to the United Nations Framework Convention on Climate Change*, December 11, 1997.

[2] O. Yamamoto, T. Takuma, S. Hamada, Y. Yamakawa, M. Yashima, “Applying a gas mixture containing c-C<sub>4</sub>F<sub>8</sub> as an insula-tion medium”, *IEEE Trans. Dielect. Electr. Insul.*, no. 6, pp. 1075–81, 2001.

[3] L. G. Christophorou, J. K. Olthoff, R. J. Van Brunt, “Sulfur hexafluoride and the electric power industry”, *IEEE Elect. Ins. Mag.* vol. 13, no. 5, pp. 20–4, 1997.

[4] A. Boubakeur, L. Mokhnache, S. Boukh-tache, A. Feliachi, “Theoretical investiga-tion on battier effect on point-plane air gap breakdown voltage based on streamers criterion”, *IEE Proc.*, vol. 151, no. 3, May 2004.

[5] H. J. Blennow, M. Sjoberg, M. A. S. Leijon, S. M. Gubanski, “Electric field reduction due to charge accumulation in a dielectric covered electrode system”, *IEEE Trans. Dielect. Electr. Ins.*, vol. 7, no. 3, pp. 340–5, June 2000.

[6] H. J. Blennow, M. A. S. Leijon, S. M. Gubanski,

### بیست و پنجمین کنفرانس بین المللی برق

- [21] U. Kogelschatz, "Filamentary, patterned and diffuse barrier discharges", *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 30, pp. 1400–8, 2002.
- [22] S. K. Dhali, P. F. Williams, "Two dimensional studies of streamers in gases", *J. Appl. Phys.* vol. 62, pp. 4696–707, 1987.
- [23] M. C. Wang, E. E. Kunhardt, "Streamer dynamics", *Phys. Rev. A*, vol. 42, pp. 2366–73, 1990.
- [24] A. B. Murphy, "Thermal plasmas in gas mixtures", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 34, R151–73, 2001.
- [25] R. Morrow, J. J. Lowke, "Streamer propagation in air", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 30, pp. 614–27, 1997.
- [26] H. Prinz, *Hochspannungsfelder*, R. Olden-bourg, Munchen, 1969.